

Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie d'un espace vectoriel V

Définition 35 (span ou vect).

Soit V un espace vectoriel et $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de V . L'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \dots, v_p$ s'appelle le *span*.

Théorème 29. *Soient $v_1, \dots, v_p$ des éléments d'un espace vectoriel V . Alors $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ est un sous-espace vectoriel de V .*

Preuve

Exemple

Définition 36 (famille génératrice).

On dira que $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une *famille génératrice* de $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$.

Exemple

4.2 Applications linéaires, noyaux et images

La notion d'application linéaire vue dans $\mathbb{R}^n$ peut se généraliser aux applications $T : V \rightarrow W$ entre deux espaces vectoriels V et W .

Définition 37 (application linéaire).

Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$. On dit que T est une *application linéaire* si elle associe à tout élément v de V un unique élément $T(v)$ de W et si T vérifie

1.

2.

Exemples

Définition 38 (noyau d'une application linéaire).

Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Le *noyau* de l'application T est l'ensemble des solutions de

$$T(v) = 0_W.$$

On le note

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_w\}.$$

Exemple

Définition 39 (image d'une application linéaire).

Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. L' *image* de l'application T est l'ensemble

$$\text{Im}(T) = \{b \in W \mid \exists x \in V \text{ avec } T(x) = b\}.$$

Exemple

Théorème 30. *Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors*

- 1. $\text{Ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .*
- 2. $\text{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W .*

Preuve

Cas particulier des matrices

On a vu que si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire, alors il existe une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à T , donnée par

$$A = (T(e_1) \dots T(e_n)).$$

Définition 40 (noyau d'une matrice).

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Le *noyau de la matrice* A , noté $\text{Ker}(A)$, est l'ensemble

$$\text{Ker}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Théorème 31. *Le noyau d'une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 41 (image d'une matrice).

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. L'image de A , notée $\text{Im}(A)$, est l'ensemble engendré par les colonnes de la matrice A .

Théorème 32. *Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Alors $\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.*

Preuve

Exemple

4.3 Bases d'un espace vectoriel

On peut généraliser la notion d'indépendance linéaire et de span vue dans le cas particulier de $\mathbb{R}^n$ pour définir les bases dans espace vectoriel quelconque.

Définition 42 ((in-)dépendance linéaire).

Soit V un espace vectoriel. Alors la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ d'éléments de V est dite *linéairement indépendante* si

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0_V$$

n'admet que la solution triviale $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. Sinon, la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est dite *linéairement dépendante*.

Exemples

Remarque

Dans $\mathbb{R}^n$, si on a une famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$, on peut échelonner la matrice dont les colonnes sont $v_1, \dots, v_p$ pour étudier l'indépendance linéaire. Pour d'autres espaces vectoriels, on n'a pas cette possibilité.

Théorème 33. *Une famille $(v_1, \dots, v_p)$, $p \geq 2$ est linéairement dépendante si et seulement si au moins un des éléments de la famille est combinaison linéaire des autres éléments.*

Définition 43 (base).

Soit V un espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille d'éléments de V . Alors $\mathcal{B}$ est une *base* de V si

1.

2.

Exemples

Théorème 34 (base extraite). Soient V un espace vectoriel et $S = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de p éléments de V . Soit $W = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ le sous-espace vectoriel de V engendré par S . Alors

1. Si un des éléments de S , par exemple v_k , s'écrit comme combinaison linéaire des v_i pour $i \neq k$, alors $\text{span}\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_p\} = W$, autrement dit, la famille reste génératrice si on enlève v_k .
2. Si $W \neq \{0_V\}$, alors il existe une famille d'éléments extraits de S qui est une base de W .

Remarque

Bases de $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$

Exemple

Théorème 35. Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice et B une forme échelonnée de A . Alors

1. Les colonnes pivots de B sont linéairement indépendantes.
2. Les colonnes pivots de A (qui correspondent aux colonnes pivots de B) sont linéairement indépendantes.
3. Les autres colonnes sont combinaisons linéaires des colonnes pivots.

Constat

Stratégie pour trouver une base de $\text{Im}(A)$

Suite de l'exemple

Remarque

Exemple : Recherche d'une base de $\text{Ker}(A)$